FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES. UHA MULHOUSE

L2 Mathématiques.

Mathématiques: ALGEBRE LINEAIRE II

Cours Elisabeth REMM

Chapitre 3

Trigonalisation des matrices carrées

1. Matrices trigonalisables

1.1. Matrices triangulaires.

Définition 1. *Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Elle est dite triangulaire supérieure si elle est de la forme*

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{1}$$

c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ dès que $j < i$.

Par exemple, toute matrice diagonale est triangulaire supérieure.

Définition 2. *Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Elle est dite triangulaire inférieure si elle est de la forme*

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ dès que $j > i$.

Pour simplifier le langage, lorsque nous parlerons de matrice triangulaire, il s'agira de matrices triangulaires supérieures. L'autre cas sera donc toujours précisé.

Proposition 1. *Toute matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet toujours n valeurs propres distincres ou confondues. Si T est la matrice triangulaire (1), ses valeurs propres sont $\lambda_k = a_{k,k}$, $k = 1, \cdots n$.*

Démonstration. En effet, le polynôme caractéristique de (1) est

$$\det(T - XI_n) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - X & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} - X & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} - X & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} - X \end{pmatrix}$$

En développant ce déterminant, on obtient

$$\det(T - XI_n) = (a_{1,1} - X)(a_{2,2} - X) \cdots (a_{n-1,n-1} - X)(a_{n,n} - X).$$

Les racines de ce polynômes sont donc $a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{n,n}$.

1.2. **Matrices trigonalisables.**

Définition 3. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Elle est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible P telle que*

$$T = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On en déduit

Proposition 2. *Toute matrice trigonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet toujours n valeurs propres distincres ou confondues.*

Une grande partie de ce chapitre est destinée à étudier la réciproque de cette proposition.

2. Trigonalisation des matrices carrées complexes

Le résultat essentiel de ce paragraphe est le suivant:

Théorème 1. *Toute matrice complexe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.*

Démonstration. Démontrons par récurrence sur $n?1$?

(1) Toute matrice carrée complexe d'ordre 1 s"écrit $M = (a_{1,1}$d. Elle est donc trigonalisble.

(2) Soit $n \geq 1$ fixé. Supposons que toute matrice complexe d?ordre $n?1$ soit trigonalisable. Considérons une matrice $M \in \mathcal{M}_n n+1(\mathbb{C})$. Nous avons vu, dans le cahpitre précédent, que toute matrice complexe d'ordre p admettait p valeurs propres distinctes ou confondues. Ainsi M admet $n+1$ valeurs propres disctinctes ou pas. Soit λ une valeur propre de M. Il existe un vecteur propre non nul $v \neq 0$ attaché à ?:
$$Mv = \lambda v.$$
Comme v est non nul, nous pouvons compléter la famille $\{v\}$ en une base $\mathcal{B} = \{v = e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. Soit P la matrice inversible obtenue en mettant en colonnes les vecteurs $v = e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}$. Comme $Mv = \lambda v$, la matrice semblable
$$M_1 = P^{-1}MP$$
est de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
Soit N la matrice complexe d'ordre n définie à partir de M_1:
$$N = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de C^n telle que si Q est la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs v_i, la matrice d'ordre n
$$N_1 = Q^{-1}NQ$$
soit triangulaire (supérieure). Considérons la matrice P_1 d'ordre $n+1$ définie par
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0_n \\ {}^t0_n & Q \end{pmatrix}$$
où $0_n = (0, 0, \cdots, 0)$, alors
$$M_2 = P_1^{-1}M_1P_1 = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ {}^t0_n & N_1 \end{pmatrix}$$
avec $B = (b_{1,}, b_{1,3}, \cdots, b_{1,n+1})$. On en déduit que M_2 est une matrice triangulaire.

(3) La propriété est donc vraie à l'ordre $n+1$. Elle est vraie quel que soit $n \geq 1$.

Exemples

(1) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$C_M(X) = -(X+1)^2(X-3).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$, racine simple et $\lambda_2 = -1$, racine double. L'espace propre associé à λ_1 est de dimension 1 et engendré par le vecteur $v_1 = (1, 2, 2)$. L'espace propre associé à la valeur double λ_2 est de dimension 1 et engendré par le vecteur $v_2 = (1, 2, 1)$. La matrice n'est donc pas diagonalisable. Pour trigonaliser la matrice, il suffit de compléter la famille libre $\{v_1, v_2\}$ en une base de $\mathbb{C}^3$. Soit $v_3 = (1, 0, 0)$ (ce choix est loin d'être unique). La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est bien une base. La matrice de changement de base est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de déterminant -2 donc non nul, ce qui montre bien que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base. La matrice semblable $T = P^{-1}MP$ s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(les valeurs propres sont sur la diagonale). On peut calculer les paramètres a et b soit en calculant $P^{-1}MP$, soit plus simplement, en écrivant que

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$a = 4, \; b = -2.$$

Ainsi M est semblable à la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$C_M(X) = -(X-1)^3.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, racine triple. L'espace propre associé à λ_1 est de dimension 1 et engendré par le vecteur $v_1 = (1,1,2)$. La matrice n'est donc pas diagonalisable. Pour trigonaliser la matrice, nous n'avons guère de méthode efficace. On en revient donc à la définition. On commence à chercher un vecteur $v_2 = (x,y,z)$ tel que

$$M.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ce système linéaire est indéterminé. On prend $a = 1$ (a est nécessairement non nul). On a alors le système

$$\begin{cases} -3x - y + 2z & = 1 \\ -15x - 7y + 11z & = 1 \\ -14x - 6y + 10z & = 2 \end{cases}$$

qui admet comme solution $(x, x+3, 2x+2)$.. On prendra $v_2 = (0,3,2)$. Complètons la famille $\{v_1, v_2\}$ en une base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si P est la matrice de changement de bases associée, alors la matrice semblable $T = P^{-1}MP$ est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Mais d est valeur propre de T donc de M ce qui implique $d = 1$. Il reste donc à calculer les constantes b et c. Choisissons $v_3 = (1,0,0)$. Alors

$$M.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -15 \\ -14 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc $b = -3$, $c = -4$. Ainsi M est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage étant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Cas des matrices carrées réelles

3.1. Critère de trigonalisation des matrices carrées réeles.

Si toute matrice carrée complexe est trigonalisable, ceci n'est pas vrai pour les matrices réelles. Ceci signifie qu'il n'existe pas toujours une matrice triangulaire réelle semblable à la matrice réele donnée, la matrice de passage devant être aussi réelle. Prenons par exemple la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont complexes conjuguées $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i.$. Comme les valeurs propres sont les éléments de la diagonale de la matrice triangulaire semblable, il est donc impossible de trigonaliser M dans $\mathbb{R}$. Notons que l'on peut trigonaliser M dans $\mathbb{C}$, mais dans ce cas, T et P, la matrice de passage, sont complexes. '

Théorème 2. *Toute matrice réelle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles distinctes ou confondues est trigonalisable.*

Démonstration. Il suffit de reprendre mot pour mot la démonstration donnée dans le cas complexe. La seule différence étant au départ. Dans le cas complexe on est assuré de l'existence d'une valeur propre. Dans le cas réel, ceci découle de l'hypothèse choisie.

Exemples. Les exemples décrits dans le paragraphe précédent sont en fait des exemples de trigonalisation dans le cas réel.

3.2. Classification des matrices réelles d'ordre 2.

Les résultats précédents, appliqués aux matrices réeles d'ordre 2, montrent que toute matrice réelle carrée d'ordre 2 est semblable à

(1) Une matrice diagonale
$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$
avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, avec éventuellement $\lambda_1 = \lambda_2$.

(2) Une matrice triangulaire
$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$
avec $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

(3) Une matice du type
$$A_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$
une telle matrice n'admet pas de valeurs propres.

4. Endomorphismes trigonalisables

4.1. Endomorphismes triangulaires.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E. Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ de E par rapport à laquelle la matrice M de f soit triangulaire:
$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Ceci signifie que

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{1,1}e_1, \\ f(e_2) = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2, \\ \cdots \\ f(e_{n-1}) = a_{1,n-1}e_1 + a_{2,n-1}e_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}e_{n-1}, \\ f(e_n) = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \cdots + a_{n-1,n}e_{n-1} + a_{n,n}e_n. \end{cases}$$

Soit F_k le sous-espace vectoriel de E ayant $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ comme base. Tout vecteur v_k de F_k s'écrit donc de manière unique $v_k = x_1e_1 = \cdots + x_ke_k$. Les relations précédentes montrent que les transformées $f(e_i)$, $i = 1, \cdots, k$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ et appartiennet donc au sous-espace F_k. Ceci signifie que chacun des sous-espaces F_k est invariant par f.

En résumé les ous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \cdots, F_n$ vérifient:

(1) $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = E$,

(2) $\dim F_k = k$, $k = 1, \cdots, n$

(3) $f(F_k) \subset F_k$, c'est-à-dire chacun des sous-espaces F_k est un sous-espace vectoriel de E invariant par f. Dans ce cas, on dit que la famille $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ de sous-espaces vectoriels de E est un drapeau de E.

4.2. **Cas complexes.**

Si E est un espace vectoriel complexe de dimension n, tout endomorphisme admet n valeurs propres disctintes ou confondues. Si M est la matrice de f relative à une base quelconque donnée, alors M est trigonalisable. On dira que tout endomorphisme sur un espace vectoriel complexe est trigonalisable.

4.3. **Cas réels.**

Soient E est un espace vectoriel rél de dimension n et f un endomorphisme de E. Si f admet n valeurs propres distinctes ou confondues, alors le matrice M de f relative à une base quelconque donnée, alors M est trigonalisable. Dans ce cas, on dira que f est trigonalisable.

EXERCICES

Exercice 1.

(1) Trigonaliser (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ les matrices suivantes

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

(2) Montrer que la matrice M_2 est semblable à la matrice triangulaire T où

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

(1) Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) En déduira A^p pour tout $p > 0$.

Exercice 3. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice triangulaire T où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. **Extrait sujet CAPES Maths 2014**

Notations et définitions. Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$) l?ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}$ (respectivement à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{Z}$). La matrice identité de taille n est notée I_n. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L?ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et noté $Sp(A)$. On dit que A est d?ordre fini s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = I_n$. Si A est d'ordre fini, le plus petit entier strictement positif k tel que $A^k = I_n$ est appelé ordre de A et noté $o(A)$.

Partie A : préliminaires

(1) Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours.
   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ii. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.(On pourra prendre $P = C_M(X)$)
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu?il existe $P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$. Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intéresse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

(2) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'ordre fini. On pose $o(B) = b$.
  (a) Démontrer que B est inversible.
  (b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $B^k = I_n$ si et seulement si b divise k.
  (c) Démontrer que les valeurs propres de B sont des racines b-ièmes de l?unité.
  (d) Démontrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
(3) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ses valeurs propres sont notées $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On suppose que C est diagonalisable et que pour tout entier i tel que $1 \geq i \geq n$, λ_i est une racine n_i-ième de l?unité pour un certain entier n_i. Pour tout entier i tel que $1 \geq i \geq n$, on note k_i le plus petit entier strictement positif tel que $\lambda_i^{k_i} = 1$.
  (a) Démontrer que C est d?ordre fini et que son ordre divise le PPCM de $k_1, \cdots, k_n$.
  (b) Démontrer que $o(C)$ est le PPCM de $k_1, \cdots, k_n$.

Partie B : matrices d?ordre fini à coefficients réels

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'ordre fini. Le but est de démontrer que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et de déterminer le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

(1) Démontrer que si toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont réelles, alors $Sp(A) \subset \{-1, 1\}$.
(2) On suppose que 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.
  (a) Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  (b) On pose $B = P{-}1AP$. Démontrer que B est d'ordre fini.
  (c) Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  (d) En déduire que $A = I_3$.
(3) Enoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.
(4) On suppose que -1 est valeur propre simple de A et que 1 est valeur propre double de A.
  (a) 4.1. Justifier qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :
$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  (b) On pose $C = Q^{-1}AQ$. Démontrer qu'il existe trois suites de nombres réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k :
$$C^k = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  On définira ces suites à l'aide de relations de récurrence.
  (c) Donner une expression de γ_k pour tout $k \geq 0$.

(d) . En déduire que $c = 0$.

(e) En déduire que C et A sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

(5) Enoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est valeur propre double de A et 1 est valeur propre simple de A.